

$y|_{x=1}=1$ бошланғич шартдан

$$1 = C - \frac{1}{2} \text{ ёки } C = \frac{3}{2}.$$

Шундай қилиб, берилган тенгламанинг хусусий ечими

$$x = \frac{1}{2} y (3 - y).$$

8.2.2. Ушбу

$$y' + P(x)y = y^\alpha Q(x)$$

кўринишдаги дифференциал тенглама *Бернулли тенгламаси* дейилади. Бу тенгламада $\alpha = \text{const}$, $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$, $P(x)$ ва $Q(x)$ функциялар x нинг узлуксиз функциялари. Янги $z = y^{1-\alpha}$ функция киритилиб, Бернулли тенгламаси 8.2.1 бандда кўриб чиқилган

$$z' + (1-\alpha)zP(x) = (1-\alpha)Q(x)$$

чизикли тенгламага келтирилади.

Бернулли тенгламасини янги z ўзгарувчи киритмай, чизикли тенглама сифатида $y = uv$ ўрнига қўйишдан фойдаланиб ҳам ечиш мумкин.

3-мисол. $y' + \frac{y}{x} = y^2 \frac{\ln x}{x}$ тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш. Берилган тенглама Бернулли тенгламаси бўлиб, бу ерда $\alpha = 2$. $y = uv$, $y' = u'v + uv'$ ўрнига қўйишни бажарамиз, натижада:

$$u'v + u\left(v' + \frac{v}{x}\right) = u^2 v^2 \frac{\ln x}{x}.$$

u , v функцияларни топиш учун ушбу системани тузамиз:

$$\begin{cases} v' + \frac{v}{x} = 0, \\ u'v = u^2 v^2 \frac{\ln x}{x}. \end{cases}$$

Биринчи тенгламани интеграллаб, $v = \frac{1}{x}$ хусусий ечимни оламиз, уни иккинчи тенгламага қўйсак,

$$u' = \frac{1}{x} \cdot \frac{\ln x}{x} u^2$$

га эга бўламиз. Ўзгарувчиларни ажратамиз ва интеграллаймиз:

$$\frac{du}{u^2} = \frac{\ln x}{x^2}$$

ёки

$$-\frac{1}{u} = \int \frac{\ln x}{x^2} dx,$$

бу ерда

$$\int \frac{\ln x}{x^2} dx = \left\{ \begin{array}{l} s = \ln x, ds = \frac{dx}{x} \\ dt = \frac{1}{x^2}, t = -\frac{1}{x} \end{array} \right\} = -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} - C.$$

Демак, $-\frac{1}{u} = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} - C$, бу ердан $u = \frac{x}{Cx + 1 + \ln x}$.

Берилган Бернулли тенгламасининг умумий ечими:

$$y = uv = \frac{1}{Cx + 1 + \ln x}.$$

8.2.3. Агар

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

кўринишдаги тенгламанинг чап қисми бирор $u(x, y)$ функциянинг тўлиқ дифференциали, яъни

$$du = M(x, y)dx + N(x, y)dy$$

бўлса, у ҳолда бундай тенглама *тўлиқ дифференциалли тенглама* дейилади.

Юқоридаги тенглама тўлиқ дифференциалли тенглама бўлиши учун

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

шарт бажарилиши керак.

Тўлиқ дифференциалли тенглама таърифидан $du = 0$, бундан $u(x, y) = C$ эканлиги келиб чиқади (C — ихтиёрий ўзгармас).

$u(x, y)$ ни топиш учун y ни ўзгармас деб ҳисоблаймиз, у ҳолда $du = 0$ эканидан $du = M(x, y)dx$ бўлади. Бу тенгликни x бўйича интегралласак,

$$u = \int M(x, y)dx + \varphi(y).$$

Охирги тенгликни y бўйича дифференциаллаймиз ва натижани $N(x, y)$ га тенглаймиз, чунки $\frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y)$.

$$\int \frac{\partial M}{\partial y} dx + \varphi'(y) = N(x, y)$$

ёки

$$\varphi'(y) = N(x, y) - \int \frac{\partial M}{\partial y} dx.$$

Бу ифодани y бўйича интеграллаб, $\varphi(y)$ ни топамиз:

$$\varphi(y) = \int \left(N(x, y) - \int \frac{\partial M}{\partial y} dx \right) dy + C.$$

Демак,

$$u(x, y) = \int M(x, y) dx + \int (N(x, y) - \int \frac{\partial M}{\partial y} dx) dy + C.$$

Бу ифодани ихтиёрий ўзгармасга тенглаб, тенгламанинг умумий интегралини ҳосил қиламиз.

4- м и с о л. $(3x^2 + 6xy^2) dx + (6x^2y + 4y^3) dy = 0$ тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Е ч и ш. Бу ерда $M(x, y) = 3x^2 + 6xy^2$, $N(x, y) = 6x^2y + 4y^3$.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 12xy, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 12xy, \quad \text{яъни} \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y) \text{ бўлганлиги сабабли}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 + 6xy^2.$$

Бу тенгликни x бўйича интеграллаймиз:

$$u = x^3 + 3x^2y^2 + \varphi(y).$$

Бундан

$$\varphi'(y) = \frac{\partial u}{\partial y} - 6x^2y.$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y) \text{ эканлигини ҳисобга олсак,}$$

$$\varphi'(y) = 6x^2y + 4y^3 - 6x^2y = 4y^3.$$

Бундан

$$\varphi(y) = y^4 + C.$$

Демак,

$$u = x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C.$$

ёки

$$x^2 + 3x^2y^2 + y^4 = C.$$

2- дарсхона топшириғи

1. Тенгламаларнинг умумий ечимини топинг:

а) $y' - \frac{1-2x}{x^2} y = 1;$

б) $(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2;$

в) $y' = \frac{1}{2x-y^2};$

г) $y' = \frac{y}{2y \ln y + y - x};$

д) $y' - y \operatorname{tg} x + y^2 \cos x = 0;$

е) $y' + \frac{2y}{x} = \frac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x};$

ж) $(x + \sin y) dx + (x \cos y + \sin y) dy = 0;$

з) $(y + e^x \sin y) dx + (x + e^x \cos y) dy = 0.$